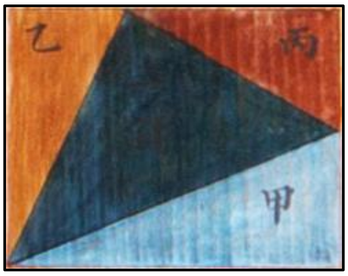
１月　龍穏院

【第３問】

今有如図直内容三斜設甲乙丙積
只云甲積四歩　又云乙積二歩　別云直積十六歩
問三斜積幾何
答曰三斜積七歩
術曰以別云除只云因又云二段以減別云半
得三斜積合問　　　　（信夫郡荒井村　佐藤剋治）



（題意）長方形に三角形を内接させると、図のように甲、乙、丙の直角三角形ができる。長方形の面積が 16 歩、甲と乙の面積がそれぞれ 4 歩、2 歩のとき、三角形の面積を求めよ。

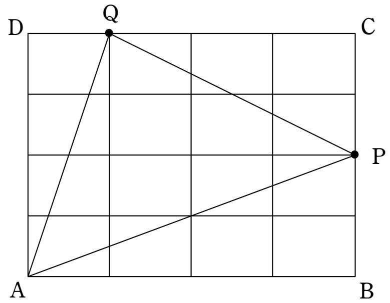
（答曰）三角形の面積は 7 歩

（術曰）$\frac{直}{2}-\frac{2甲乙}{直}$　（直、甲、乙は、それぞれ長方形、甲、乙の面積を表す）

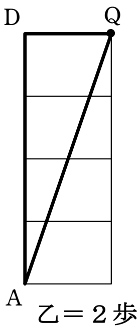
【解説】

撰者は面積を整数値で具体的に与え、誰でも取り組めるようにしていますが、その分「術曰」では、与えられたデータ（只云～別云）だけで三斜積を決定する一般式を提示しています。それによって、和算特有の式変形の妙を示すとともに、縦横の格子以外の補助線の可能性を引き出そうとしたのかもしれません。

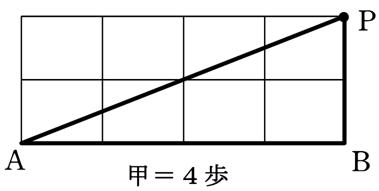
【解答例】



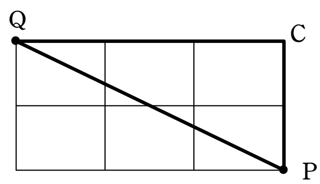
（１）直積が 16 歩であることから、長方形の紙を用意して図のように 16 等分の折り目を付けます。これによって全体が、１歩の面積を持つ 16 個の長方形に分割され、甲積 4 歩、乙積 2 歩から２点 P、Q の位置が決定します。



乙＝２歩



甲＝４歩

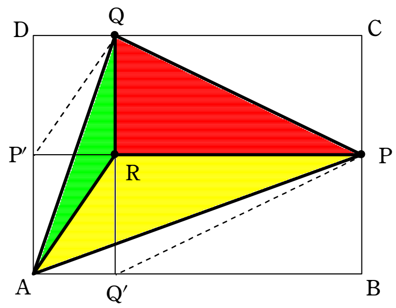


丙＝３歩

よって図から、

$$三斜=直-(甲+乙+丙)=16-(4+2+3)=7 \blacksquare$$

（２）右図のように三角形ΔAPQ（三斜）を３色に塗り分けると、



$\triangle$APR の面積（黄）＝ $\triangle$Q'PR の面積

＝ □Q'BPR の面積の半分

$\triangle$ARQ の面積（緑）＝ $\triangle$P'RQ の面積

＝ □P'RQD の面積の半分

したがって、

$$\boxed{三斜＝赤＋黄＋緑＝(直－□\mathrm{AQ'RP'})\div 2}$$

という等式が成り立つことが見て取れます。
ここに、

$$□\mathrm{AQ'RP'} = □\mathrm{ABPP'} \times \frac{□\mathrm{AQ'QD}}{□\mathrm{ABCD}} = 2\,甲 \times \frac{2\,乙}{直} = \frac{4\,甲乙}{直}$$

よって、術文の

$$\frac{直}{2} - \frac{2\,甲乙}{直}$$

という式を得ます。

したがって、この問題の答えは

$$三斜 = \frac{16}{2} - \frac{2\times 4\times 2}{16} = 8 - 1 = 7 \ ■$$

※ 術文の式は、長方形の形・大きさや２点 P、Q の位置に関わらず成立します。

（文責：五輪教一）